Μάθημα 5ο 11/11/15

Ανεξαρτησία

ΟΡΙΣΜΟΣ: Οι τ.μ. $X_1, \dots, X_k$ είναι (λέγονται) ανεξάρτητες αν για κάθε συλλογή από υποσύνολα $B_1, \dots, B_k$ του $\mathbb{R}^1$ ισχύει $P(X_1 \in B_1, \dots, X_k \in B_k) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_k \in B_k)$

1ο Κριτήριο Ανεξαρτησίας: Οι τ.μ. $X_1, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες αν-ν $F_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_k}(x_k)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: ανεξ. $\Rightarrow$: $B_i = \{X_i \leq x_i\}$ και ορισμός

2ο Κριτήριο Ανεξαρτησίας: Οι τ.μ. $X_1, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες αν-ν

i) $P_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = P_{X_1}(x_1) \cdots P_{X_k}(x_k)$ ①

ii) $f_{X_1, \dots, X_k}(x_1, \dots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_k}(x_k)$ ②

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: -Διακριτή περίπτωση $(k=2)$

ανεξ. $\Rightarrow$: Έστω $B_1 = \{x_1\}$ και $B_2 = \{x_2\}$.

$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2)$

ή $P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P_{X_1}(x_1) P_{X_2}(x_2)$ δηλ. ①

① $\Rightarrow$: $P_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = P_{X_1}(x_1) P_{X_2}(x_2)$

ή $P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) = P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2)$

ή $P(X_1 \in B_1, X_2 \in B_2) = P(X_1 \in B_1) \cdot P(X_2 \in B_2)$

ή X_1, X_2 ανεξάρτητες από ορισμό.

Για συνεχείς τ.μ. X_1, X_2 με $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$

ανεξ. $\Rightarrow$: $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1) \cdot F_{X_2}(x_2)$

ή

$$\frac{\partial^2 F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left[F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \right]$$

$\rightarrow f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$ δηλ. ②

Αν η ② $\rightarrow$: $\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,X_2}(y_1,y_2)\, dy_1 dy_2 = \int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1}(y_1) f_{X_2}(y_2) dy_1 dy_2$

$\rightarrow F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2) \rightarrow$ ανεξ. από 1ο Κριτήριο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Τ.Μ. (X,Y) του παραδείγματος με τα ζάρια

$P_{X,Y}(0,0)\left(=\frac{16}{36}\right)^2 - P_X(0)\cdot P_Y(0)\left(=\frac{25}{36}\cdot\frac{25}{36}\right)$ όχι.

είναι $\neq$

άρα οι Τ.Μ. X και Y δεν είναι ανεξάρτητες.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: $(X_1,X_2) \sim F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-e^{-x_1})(1-e^{-x_2})$, $x_1,x_2>0$

$F_{X_1}(x_1) = F_{X_1,X_2}(x_1,\infty) = 1-e^{-x_1}$, $x_1>0$

$F_{X_2}(x_2) = 1-e^{-x_2}$, $x_2>0$

Επειδή $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-e^{-x_1})(1-e^{-x_2}) = F_{X_1}(x_1)\, F_{X_2}(x_2)$ ανεξ.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3: $(X,Y,Z) \sim f_{X,Y,Z}(x,y,z) = (x+y)e^{-z}$, $0<x,y<1$, $z>0$.

Είναι οι X,Y,Z ανεξάρτητες;

$f_{X,Y}(x,y) = x+y$, $0<x,y<1$

$f_{X,Z}(x,z) = \left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-z}$, $0<x<1$, $z>0$.

$f_{Y,Z}(y,z) = \left(y+\frac{1}{2}\right)e^{-z}$, $0<y<1$, $z>0$.

X,Z ανεξ.
Y,Z ανεξ.
X,Y δεν είναι ανεξ.

$$\left\{\begin{array}{ll} f_X(x) = x+\frac{1}{2}, & 0<x<1 \\ f_Y(y) = y+\frac{1}{2}, & 0<y<1 \\ f_Z(z) = e^{-z}, & z>0 \end{array}\right\} \quad f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \left((x+y)e^{-z}\right) \neq f_X(x) f_Y(y) f_Z(z) = \left(= \left(x+\tfrac{1}{2}\right)\left(y+\tfrac{1}{2}\right)e^{-z}\right)$$

δεν είναι ανεξ.

Συνέπειες Ανεξαρτησίας

1. X_1, X_2 ανεξ. τ.μ. τότε $F_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = F_{X_1}(x_1)$

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = P_{X_1}(x_1) \text{ για διακριτές}$$

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = f_{X_1}(x_1) \text{ για συνεχείς.}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: $(X,Y) \sim f_{X,Y}(x,y) = x+y \ , \ 0<x,y<1.$

$f_X(x) = x + \frac{1}{2} \ , 0<x<1$

$f_Y(y) = y + \frac{1}{2} \ , \ 0<y<1.$

$f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{x+y}{x+1/2} \ , \ 0<x,y<1.$

$\neq y + \frac{1}{2} \left(= f_Y(y)\right)$ Άρα δεν είναι ανεξάρτητες

2. Έστω $X_1, \ldots, X_k$ ανεξ. τ.μ. και $Y_i = h_i(X_i)$, $i=1,\ldots,k$. συναρτήσεις των X_i. Τότε οι τ.μ. $Y_1 = h_1(X_1), \ldots, Y_k = h_k(X_k)$ είναι ανεξ. τ.μ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ($k=2$): Αρκεί: $P(Y_1 \in B_1, Y_2 \in B_2) = P(Y_1 \in B_1) P(Y_2 \in B_2)$ για B_1, B_2 υποσύνολα του $\mathbb{R}^1$.

$$\begin{aligned} P(Y_1 \in B_1, Y_2 \in B_2) &= P(X_1 \in h_1^{-1}(B_1), X_2 \in h_2^{-1}(B_2)) = \\ &= P(X_1 \in h_1^{-1}(B_1)) P(X_2 \in h_2^{-1}(B_2)) = \\ &= P(Y_1 \in B_1) P(Y_2 \in B_2) \end{aligned}$$

δηλαδή Y_1, Y_2 ανεξάρτητες τ.μ. από ορισμό.

3. i) Έστω X_1, X_2 ανεξ. τ.μ. τότε $E(X_1 X_2) = EX_1 \cdot EX_2$.

ii) Έστω $X_1, \ldots, X_k$ ανεξ. τ.μ. και $h_1(X_1), \ldots, h_k(X_k)$ συναρτήσεις των $X_1, \ldots, X_k$

Τότε: $E[h_1(X_1) \cdots h_k(X_k)] = E[h_1(X_1)] \cdots E[h_2(X_2)]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: i) $E(X_1 X_2) = \iint_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) dx_1 dx_2 =$

$$= \iint_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} x_2 f_{X_2}(x_2)\, dx_2$$

$$E[h_1(X_1) h_2(X_2)] = \iint_{-\infty} h_1(x_1) h_2(x_2) f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h_1(x_1) f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h_2(x_2) f_{X_2}(x_2)\, dx_2 =$$

$$= E[h_1(X_1)]\; E[h_2(X_2)].$$

4. Έστω X_1, X_2 ανεξ. τ.μ.
$Cov(X_1, X_2) = 0$, άρα και $\rho(X_1, X_2) = 0 \leftarrow$ ασυσχέτιστες.
Άρα αν X_1, X_2 ανεξ. $\Rightarrow X_1, X_2$ ασυσχ.
Αν X_1, X_2 ασυσχ. τ.μ. τότε $\not\Rightarrow$ (κατ' ανάγκην) ότι X_1, X_2 ανεξ. τ.μ.

ΑΝΤΙΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: (X, Y) τ.μ. με

Y \ X	-1	0	1
1	1/6	•	1/6
0	•	•	•
-1	1/6	1/3	1/6

$P(X=-1, Y=-1) = P(X=1, Y=-1) = P(X=-1, Y=1) = P(X=1, Y=1) = 1/6.$
$P(X=0, Y=-1) = 1/3.$
$P(X=-1) = 1/3$, $P(X=0) = 1/3$, $P(X=1) = 1/3.$
$P(Y=-1) = 2/3$, $P(Y=1) = 1/3$
Επειδή $P(X=-1, Y=-1) \left(= \frac{1}{6}\right) \neq P(X=-1)\, P(Y=-1) \left(= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}\right)$

οι X, Y δεν είναι ανεξ.

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - 0 = 0 \rightsquigarrow \{X, Y$ ασυσχέτιστες$\}$

- $E(XY) = \sum\sum xy\, p_{X,Y}(x,y) = (-1)(-1) \cdot \frac{1}{6} + \dots + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} = 0$

- $E(X) = (-1) \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = 0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2: $X \sim U(-1,1)$ δηλ $f_X(x) = \frac{1}{2}$, $-1<x<1$

$Y = X^2$

Προφανώς: X και $Y = X^2$ δεν είναι ανεξάρτητες τ.μ.

Είναι ασυσχέτιστες;

$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = E(X^3) - E(X)E(X^2) = 0 - 0 \cdot EX^2 = 0$, X, Y ασυσχ. τ.μ.

$$EX = \int_{-1}^{1} x \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$EX^3 = \int_{-1}^{1} x^3 \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi \sigma_X \sigma_Y \sqrt{1-\underset{0}{\rho^2}}} \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\underset{0}{\rho^2})} \left[\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\underset{0}{\rho} \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 \right] \right\}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_X} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 \right\}$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_Y} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 \right\}$$

Για X, Y κανονικές: X, Y ανεξ. τ.μ. $\Leftrightarrow$ X, Y ασυσχ. τ.μ.

3ο Κριτήριο ανεξαρτησίας: Οι τ.μ. $X_1, \dots, X_k$ είναι ανεξ. αν-ν $m_{X_1,\dots,X_k}(t_1,\dots,t_k) = m_{X_1}(t_1) \cdots m_{X_k}(t_k)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ($k=2$):

ανεξ $\Rightarrow$: $m_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = E\left[e^{t_1X_1 + t_2X_2}\right] = E\left[e^{t_1X_1} \cdot e^{t_2X_2}\right] = E\left[e^{t_1X_1}\right] E\left[e^{t_2X_2}\right] = m_{X_1}(t_1) \cdot m_{X_2}(t_2)$

Αν $m_{X_1,X_2}(t_1,t_2) = m_{X_1}(t_1) \cdot m_{X_2}(t_2) \Rightarrow$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x_1 + t_2x_2} f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)\, dx_1 dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x_1} f_{X_1}(x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x_1} f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_2x_2} f_{X_2}(x_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{t_1x_1 + t_2x_2} f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)\, dx_1 dx_2$$

Αθροίσματα και γραμμικοί συνδυασμοί ανεξ. τ.μ.

Για $X_1, \dots, X_k$ ανεξ. τ.μ., $Y = \sum_1^k X_i$, $Z = \sum_1^k a_i X_i$, a_i σταθ.

1. i) $m_Y(t) = m_{X_1+\dots+X_k}(t) = m_{X_1}(t)\cdots m_{X_k}(t)$

ii) Για X_i ανεξ. και ισόνομες με την X τ.μ. $m_Y(t) = [m_X(t)]^k$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

1) $X_i \sim B(n_i, p) \rightsquigarrow \sum_1^k X_i \sim B\left(\sum_1^k n_i, p\right)$ γιατί $m_{X_i}(t) = (pe^t+q)^{n_i}$

2) $X_i \sim Pois(\lambda_i) \rightsquigarrow \sum_1^k X_i \sim Pois\left(\sum_1^k \lambda_i\right)$ $m_{X_i}(t) = e^{\lambda_i(e^t-1)}$

3) $X_i \sim NB(k_i, p) \rightsquigarrow \sum_1^k X_i \sim NB\left(\sum_1^k k_i, p\right)$ $m_{X_i}(t) = \dfrac{p^{k_i}e^{tk_i}}{(1-qe^t)^{k_i}}$

4) $X_i \sim G(a_i, \beta) \rightsquigarrow \sum_1^k X_i \sim G\left(\sum_1^k a_i, \beta\right)$ $m_{X_i}(t) = (1-\beta t)^{-a_i}$

5) $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \rightarrow \sum_1^k X_i \sim N\left(\sum_1^k \mu_i, \sum_1^k \sigma_i^2\right)$ $m_{X_i}(t) = e^{\mu_i t + \frac{1}{2}\sigma_i^2 t}$

2 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \rightsquigarrow Z = \sum_1^k a_i X_i \sim N\left(\sum_1^k a_i\mu_i, \sum_1^k a_i^2\sigma_i^2\right)$

Μη αναπαραγωγικές

$X_i \sim Εκθ(\lambda) \rightsquigarrow \sum_1^k X_i \sim G\left(k, \beta = \frac{1}{\lambda}\right)$ γιατί $m_{X_i}(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda - t}$

$X_i \sim Geo(p) \rightsquigarrow \sum_1^k X_i \sim NB(k, p)$ $m_{X_i}(t) = \dfrac{pe^t}{1-qe^t}$

Ανεξαρτησία τυχαίων διανυσμάτων

Τα $\underset{\sim}{X_1}, \underset{\sim}{X_2}$ τ. διανύσματα είναι ανεξ. αν-ν.

i) $F_{\underset{\sim}{X_1},\underset{\sim}{X_2}}(\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}) = F_{\underset{\sim}{X_1}}(\underset{\sim}{x_1}) F_{\underset{\sim}{X_2}}(\underset{\sim}{x_2})$

ii) $P_{\underset{\sim}{X_1},\underset{\sim}{X_2}}(\underset{\sim}{x_1}, \underset{\sim}{x_2}) = P_{\underset{\sim}{X_1}}(\underset{\sim}{x_1}) P_{\underset{\sim}{X_2}}(\underset{\sim}{x_2})$

iii) $f_{\underset{\sim}{X_1},\underset{\sim}{X_2}}(\underset{\sim}{x_1},\underset{\sim}{x_2}) = f_{\underset{\sim}{X_1}}(\underset{\sim}{x_1}) f_{\underset{\sim}{X_2}}(\underset{\sim}{x_2})$

$$\Sigma_{\underset{\sim}{X_1},\underset{\sim}{X_2}} = \begin{pmatrix} \Sigma_{\underset{\sim}{X_1}} & 0 \\ 0 & \Sigma_{\underset{\sim}{X_2}} \end{pmatrix}$$

iv) $m_{\underset{\sim}{X_1},\underset{\sim}{X_2}}(\underset{\sim}{t_1},\underset{\sim}{t_2}) = m_{\underset{\sim}{X_1}}(\underset{\sim}{t_1}) m_{\underset{\sim}{X_2}}(\underset{\sim}{t_2})$

Για $\underset{\sim}{X_1},\underset{\sim}{X_2}$ ανεξ. τ.μ.

ΑΣΚΗΣΗ 2.4.

$$f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}, \quad -\infty < x,y < +\infty \quad || \quad X \sim ;, \ Y \sim ;, \ Y|X=2 \sim ;, \ X^2 \sim ;, \ Y^2 \sim ;$$

ΛΥΣΗ:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy}_{N(0,1)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad -\infty < y < \infty$$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}y^2}, \quad -\infty < y < \infty$$

$= f_Y(y)$ δηλ. X, Y ανεξ τ.μ.

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X^2 \le z) = P(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}) = 2P(0 \le X \le \sqrt{z}) =$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{z}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx =$$

$$= \cancel{2}\int_0^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t} \frac{dt}{\cancel{2}\sqrt{t}} = \qquad \left\{ x^2 = t \to 2x\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}} \right\}$$

$$= \int_0^{z} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} t^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt =$$

$$= \int_0^{z} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt.$$

$$F_Z(z) = \int_0^{z} f(t)\,dt.$$